Ausarbeitung zum F-Praktikum
Versuch B 3.18: Stochastische Resonanz

von Markus Rosenstihl
eMail: rosenst@prp.physik.tu-darmstadt.de
Versuchspartner: Markus Merkel
Betreuer: Thomas Stemmler

1 Einführung

In diesem Versuch sollten wir uns in mit den Grundlagen der Stochastischen Resonanz befassen.

In der Natur kommt Stochastische Resonanz relativ häufig vor. So lässt sich zum Beispiel die Periodizität von Eiszeiten erklären. Die periodische Wiederkehr der Eiszeiten passt recht gut mit der periodischen Änderung der Exzentrizität der Erdachse zusammen. Die alleinige Änderung der Exzentrizität der Erdachse würde allerdings nicht ausreichen, jedoch wird das schwache Signal der Exzentrizität durch das "Rauschen", erzeugt durch die Jahreszeiten, verstärkt. Dadurch gibt es auf der Erde alle 100000 Jahre eine Eiszeit.

Ein weiteres Beispiel aus der Natur sind Löffelstöre. Ein junger Löffelstör benutzt zum Beispiel stochastische Resonanz um sein Beute (ein bestimmte Wasserflohart) zu jagen. Diese Flöhe geben EM Strahlung ab welche recht genau definiert ist. Das Signal alleine ist aber zu schwach um vom Stör wahrgenommen zu werden. Er schwimmt deshalb in einem bestimmten Abstand zum Schwarm um durch das Rauschen der anderen Flöhe das Signal eines Opfers in seiner Nähe zu verstärken. Mit zunehmenden Alter jedoch benötigt er diese Methode nicht mehr, er schwimmt einfach mit geöffnetem Maul durch den Schwarm.

Wir untersuchen hier wie ein schwaches periodisches Signal durch Rauschen verstärkt werden kann. Als Beispiel dazu dient eine Schaltung mit einem Schmitt-Trigger.

2 Versuchsbeschreibung

Unser Schmitt-Trigger beschreibt unser Doppelmulden-Potential. In so einem System gibt es zwei stabile Zustände welche durch eine Schwelle (obere und untere Schwelle) begrenzt sind, von dem immer nur einer besetzt werden kann. Sobald das Signal über diese Schwelle kommt, geht das System in den anderen Zustand über. Falls das Signal nun ein Rauschen ist, wird das System stochastisch zwischen den beiden Zuständen springen. Wenn das Rauschen nun schwach ist, ist die Übergangszeit gross (seltene übergänge), ist das Rauschen stark, ist die Übergangszeit klein (viele Übergänge. In unserem Versuch wird das Potential nun mit einem schwachen periodischen Signal überlagert (genauer: das Rauschen wird damit berlagert). Wenn nun das Rauschen die optimale Stärke hat sind die übergänge ungefähr periodisch mit dem periodischen Signal synchronisiert. In unserem Versuch wird das Standard Modell der SR (Stochastischen Resonanz) nachmodelliert.

3 Standard Modell der SR

Ein Teilchen ist in einem periodisch angeregten bistabilen Potential mit der Form

$$V(x,t) = -(\tfrac{1}{2}a \cdot x^2 - \tfrac{1}{4}b \cdot x^4) + Ax_m \sin(\omega_{mod}t + \Phi_0)$$

wobei die Klammer das Doppelmuldenpotential und der Sinus die Modulation mit Amplitude A und Modulationsfrequenz ω_{mod} darstellt. Es ist zu beachten dass eine zu starke Modulation die Bistabilität zerstören kann. Die Bewegungsgleichung dieses Teilchens mit gedämpfter Bewegung und mit Rauschen lautet

$$\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - \tfrac{dV(x,t)}{dx} + \Gamma(t)$$

Mit adiabatischer Elimination ($\ddot{x} = 0$ und $\ddot{x} \gg Rauschfrequenz\omega_{mod}$) vereinfacht sich die Gleichung auf eine DGL 1. Ordnung.

$$\dot{x} = -\tfrac{dV(x,t)}{\gamma dx} + \tfrac{\Gamma(t)}{\gamma}$$

Dies ist eine sogenannte Langevingleichung.

Wenn nun die eine Mulde des Potentials durch das periodische Signal angehoben wird, ist die Wahrscheinlichkeit für einen Sprung am höchsten. Dies ist immer nach einer vollen Periode der Fall. Die Wahrscheinlichkeit eines Überganges wird durch die Kramersrate beschrieben. Es ist also auch eine Art statistisches Mittel mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Sprung erfolgt. Sie ist für Rauschen ohne Modulation für beide Mulden gleich gross.

$$P_{\pm} = \exp\left[-\tfrac{\Delta V}{D}\right]$$

Mit zusätzlicher Modulation variieren die Kramersraten periodisch mit der Zeit und sind somit nicht mehr gleich gross. (Kramersrate) Man sieht dass die Kramersrate auch von der Rauschstärke abhängig ist. Zu beachten ist auch dass man hier einen vollen Zyklus warten muss da bei einem halben Zyklus das Potential am grössten ist. Aus diesem Grund erwarten wir ein

Maximum der Übergangszeiten bei T/2 und nT/2 T. Hiermit haben wir eine Möglichkeit zur Auswertung: Wenn wir nun die Höhe dieser Maxima bei verschiedenen Rauschstärken übereinander auftragen erhalten wir ein Kurve mit Maximum bei der idealen Rauschstärke. Eine weitere Möglichkeit gibt uns das Signal-to-Noise-Ratio (SNR). Das SNR ist das Verhältnis von Signal zu Rauschstärke. Wenn der Output des Triggers einfach-logarithmisch gegen die Frequenz aufgetragen wird ergibt sich die SNR aus: log(SNR)=log(S)-log(N) Wenn wir nun die SNR über die Rauschstärken auftragen erhalten wir einen ähnlichen Kurvenverlauf wie in der vorherigen Methode mit einem Maximum bei der idealen Rauschstärke.

4 Versuchsaufbau

Wir verwenden eine Schaltung die aus variablem Verstärker, Addierer und Schmitt-Trigger besteht.

4.1 Vertärker

Der Verstärker ist wie folgt aufgebaut:

Durch das Drehpotentiometer kann die Rauschstärke variabel eingestellt werden. Zuerst wurden die Widerstände mit Hilfe ihrer Farbcodes bestimmt. Der Festwiderstand hat 5.1kΩ. Um später eine Relation der Potentiome-

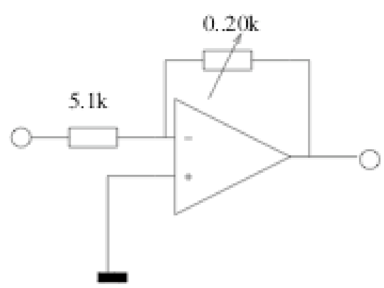

Abbildung 1: **Verstärker Schaltbild**

tereinstellung zur Rauschspannung zu bekommen wurde ein Messreihe zur Eichung aufgenommen. Der Fehler der Steigung betrug 0.36% und wurde deshalb vernachlässigt.

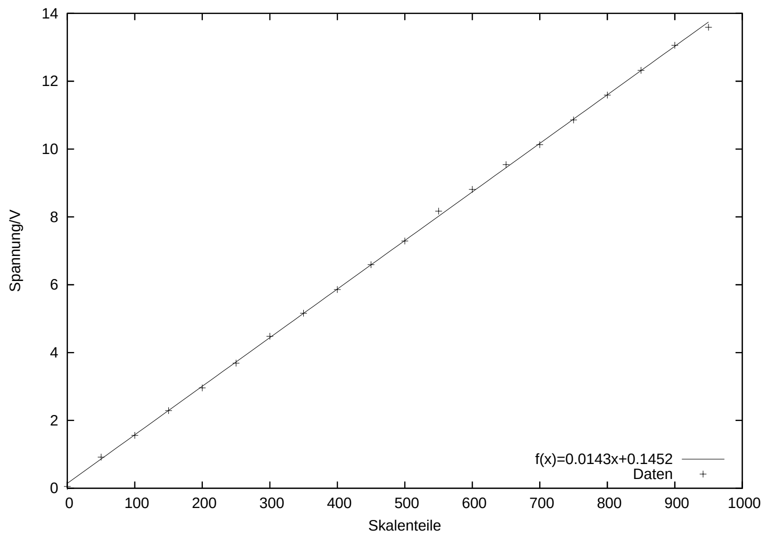

Abbildung 2: **zur Kalibrierung**

4.2 Addierer

Der Addierer summiert die Rauschspannung und das periodische Signal miteinenander. Alle Widerstände des Addierers haben 100kΩ, d.h. alle Spannungen werden gleich gewichtet.

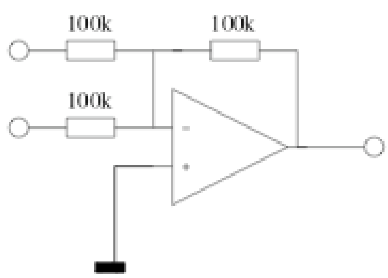

Abbildung 3: **Addierer Schaltbild**

4.3 Schmitt-Trigger

Das Ausgangssignal wird auf einen Schmitt-Trigger gelegt. Dieser springt zwischen seinen zwei Zuständen, je nach dem ob das Eingangsignal die Schwelle überschritten hat oder nicht. Die Schwellenspannung des Triggers beträgt theoretisch 1.36 V, real jedoch nur 1.31 V da die Ausgangsspannung U_a nicht gleich der Betriebsspannung ist und wir somit für die Formel

$$U_e = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U_a \tag{1}$$

nicht 15 V Ausgangsspannung annehmen dürfen.

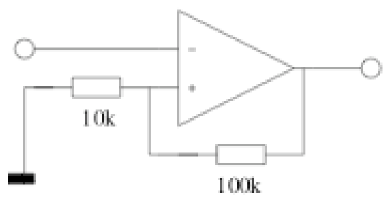

Abbildung 4: **Schmitt-Trigger Schaltbild**

5 Auswertung

5.1 Signal-to-Noise Ratio

Zuerst wurde die SNR in Abhängigkeit der Rauschstärke bestimmt. Als optimale Rauschstärke erhalten wir einen Wert von ungefähr 4.5V (siehe Abb. 5). Da wir sehr wenige Messwerte in der Umgebung des Maximums haben ist diese Bestimmung leider relativ ungenau. Zur Bestimmung der SNR wurde ein Programm geschrieben das dem Peak bei Zeile 2000 eine Gaussfunktion anfittet (Abb. 6).

$$f\left(x\right) = a + b \cdot Exp\left(-\left(\frac{x-c}{d}\right)^2\right) \tag{2}$$

Das SNR in dB erhält man nun durch $10 \cdot \log(b/a)$.

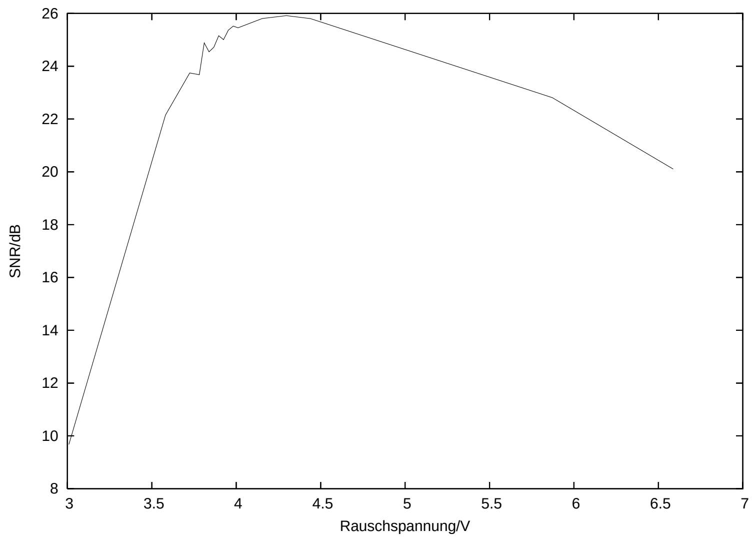

Abbildung 5: **SNR(dB) in Abhängigkeit der Rauschstärke**

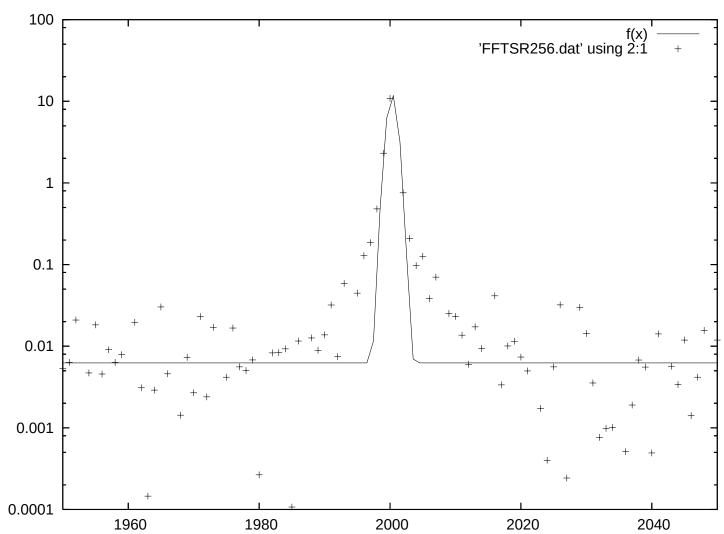

Abbildung 6: **Peak und angefittete Gausskurve**

5.2 Verweildauernverhältnis

Als nächstes wurden die Verweildauern bestimmt, d.h. wie oft kommen bestimmte Verweildauern in einer Messung vor. Dazu wurde ein Programm geschrieben welches einen Wert mit dem nachfolgenden Wert vergleicht. Ist die Differenz zwischen den beiden Werten zu gross, wird die Länge der Verweildauer notiert. Kommt die gleiche Verweildauer nun öfter vor wird diese Anzahl notiert und über die Verweildauern aufgetragen. Auf dem Bild erkennt man dass die geraden Verweildauern wesentlich öfter vorkommen als die ungeraden Verweildauern. Wendet man dieses Programm auf die Mes-

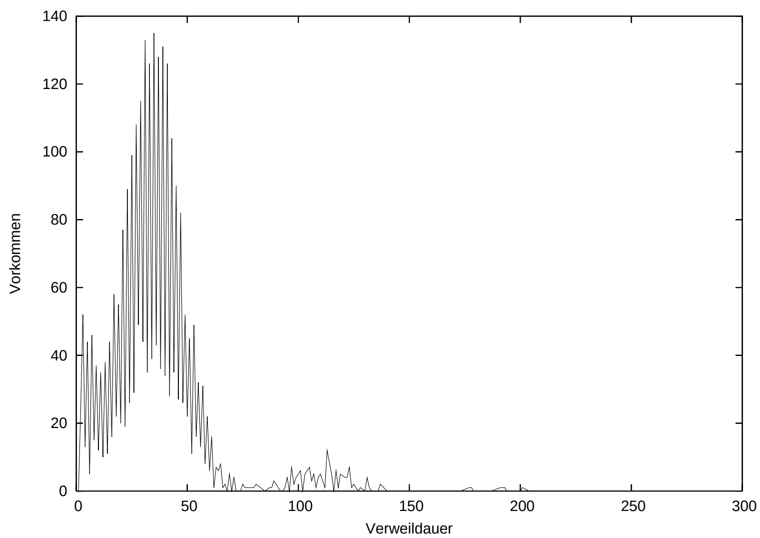

Abbildung 7: **Verweildauernhäufigkeit**

sung mit der periodischen Anregung an, so erhält man ein sehr ausgeprägtes Maximum bei einer Verweildauer von ungefähr 36. Von den anderen Daten wurde nun die Verweildauer an dieser und zwei benachbarten Stellen ermittelt und dann der Mittelwert bestimmt (wegen der stark schwankenden Verweildauernhäufigkeit). Als Ergebnis erhält man eine Kurve der Verweildauernhäufigkeit über der Rauschspannung. Die optimale Rauschspannung ist wieder das Maximum dieser Kurve und liegt bei etwa 4 Volt und damit eindeutig geringer als beim SNR. Es solle jedoch genau umgekehrt sein. Der Grund liegt darin dass in der Fouriertransformierten die Peakhöhen grösser sind als bei den Verweildauern, da in der Fouriertransformierten auch Vielfache der Frequenz vorkommen. Bei den Verweildauern jedoch verteilt sich die Hüfigkeit auf die verscheidenen Peaks. Genauer gesagt: Bei geringer Rauschspannung verschiebt sich der Schwerpunkt der Kurve zur Null hin. Bei optimaler Rauschspannung erwarten wir einen einzigen ausgeprägten Peak bei T/2, wenn die Rauschspannung jedoch ansteigt gibt es weitere Peaks und der erste Peak ist weniger aussgeprägt. Ausserdem tragen die Häufigkeiten um die Null im Fourierspektrum dem Untergrund bei, während sie bei den Verweildauern die Peaks verkleinern.

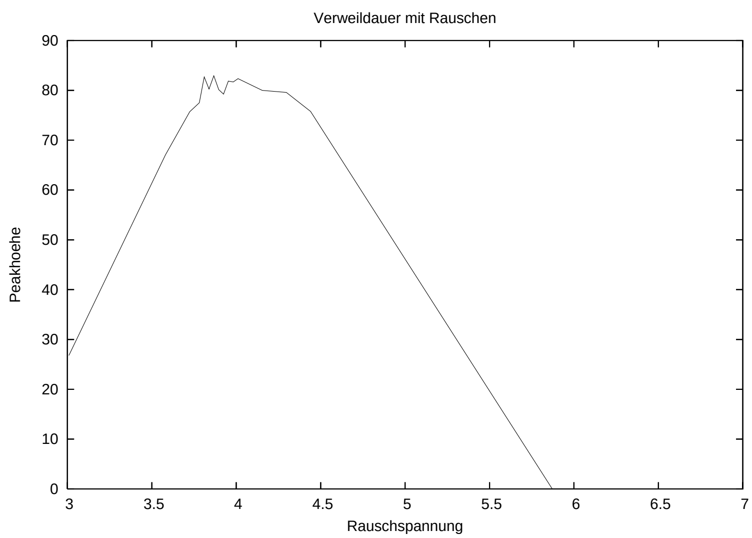

Abbildung 8: **Verweildauern mit Rauschen**

6 Anhang

6.1 Programme

Um die Daten auswerten zu können wurden Programme mit Python und GNUplot geschrieben: Zur Auwertung der Verweildauern:

```
#!/usr/bin/python
# -*- coding: Latin1 -*-
# verweildauern.py 'Dateiname' 'Schwelle'
from sys import argv
datei=open(argv[1], 'r')                        # 1. Argument ist Dateiname
werte=datei.readlines()                         # Datei wird eingelesen, Liste mit Za
a = 0                                                   # Iterationsvariable
liste = {}                                      # Liste der Verweildauern mit Häufigk
Verweildauer=0
while a < len(werte)-1:                         # für jede Zeile
        delta=float(werte[a]) - float(werte[a+1])
    if abs(delta) < float(argv[2]):     # Differenz kleiner asl Schwelle
        Verweildauer += 1                       # Verweildauer wird um 1 erhöht
    else:                                               # Sprung erfolgte
        if liste.has_key(Verweildauer): # Prüfe ob Verweildauer schon existiert
            liste[Verweildauer] += 1    # erhöhe Zähler um 1
        else:
            liste[Verweildauer] = 0     # erzeuge Zähler für noch nicht existierende
        Verweildauer=0                  # Setze Verweildauer zurück
    a=a+1                                               # Iterationsvariable um 1 erh
liste[0]=0                                              # Verweildauer 0 auf null set
liste[1]=0                                              # s.o.
liste_sort=liste.keys()
liste_sort.sort()                               # Sortiere Liste
print "# ", argv[1]                             # Gebe Dateinamen aus
for Verweildauer in liste_sort :        # Gebe die Liste aus
    print Verweildauer, liste[Verweildauer]
```

Zur Bestimmung des SNR durch Fit einer Gausskurve an den Peak

```
#!/bin/bash
gnuplot << EOF
f(x)=a+b*exp(-((x-c)/d)**2)
a=0.006
b=3
c=2000
d=3
e=${1//[A-Za-z.]}                       # extrahiere Skalenteile aus Dateiname
fit [1200:2800] f(x) '$1' using 2:1 via c
fit [1200:2800] f(x) '$1' using 2:1 via b,a
fit [1200:2800] f(x) '$1' using 2:1 via d
fit [1200:2800] f(x) '$1' using 2:1 via a,b,c,d
set terminal postscript eps
set output '${1%%.dat}.eps'
plot [1950:2050] f(x), '$1' using 2:1
set print 'fit_data_${1//[A-Za-z.]}.log'
print a, b, c, d, e*0.014317+0.14518    # e*É Volt
EOF
```

Zur Ausgabe der SNR in Abhängigkeit der Rauschspannung:

```
#!/bin/bash
for i in FFTSR*
do
        sh gauss-fft.gnu $i             # Fitte Gausskurve
        cat fit_data_* > datatest       # Parameter in eine Datei
done
# Plotte Kurve
gnuplot << EOF
set terminal postscript eps
set output 'sr_SNR.eps'
set ylabel "SNR/dB"
set xlabel "Rauschspannung/V"
set key off
plot 'datatest' using 5:(10*(log($2-$1))) with lines
EOF
```

Zur Ausgabe der Verweildauer in Abhängigkeit der Rauschspannung

```
#!/usr/bin/python
# -*- coding: Latin1 -*-
from sys import argv
import re
datei=open(argv[1], 'r') # 1. Argument ist Dateiname
werte=datei.readlines()  # Datei wird eingelesen, Liste mit Zahlen
a = 0       # Iterationsvariable
liste = {}  # Liste der Verweildauern mit Häufigkeit, Dictionary
Verweildauer=1
while a < len(werte)-1: # für jede Zeile
    if abs(float(werte[a]) - float(werte[a+1])) < 600: # wenn Abstand beider Werte ni
        Verweildauer += 1 # Verweildauer wird um 1 erhöht
    else:      # Sprung erfolgte
        if liste.has_key(Verweildauer): # Prüfe ob Verweildauer schon existiert
            liste[Verweildauer] += 1    # erhöhe Zähler um 1
        else:
            liste[Verweildauer] = 1     # erzeuge Zähler für noch nicht existierende
        Verweildauer=1  # Setze Verweildauer zurück
    a=a+1
liste_sort=liste.keys()
liste_sort.sort()       # Sortiere Liste
#print "# ", argv[1] # gebe auch noch Dateiname als Kommentar aus
#for Verweildauer in liste_sort :
#    print Verweildauer, liste[Verweildauer] # Gebe die Liste aus
skt=re.findall(r'[0-9]+', argv[1]) #Skalenteile, aus Dateiname! ist eine Liste mit ei
volt=float(skt[0])*0.014317+0.14518
print volt,(liste[35]+liste[34]+liste[36])/3
```